Permutacje

Permutacją zbioru n- elementowego nazywamy każdy n- wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Permutacja spełnia następujące warunki:
- każda permutacja obejmuje wszystkie dane elementy,
- istotna jest kolejność elementów permutacji.

Z permutacjami zbioru mamy do czynienia wówczas, gdy porządkujemy elementy tego zbioru. Permutacja to każde ustawienie wszystkich elementów zbioru w dowolnej kolejności.

Z trzech danych elementów: a, b, c, można utworzyć następujące permutacje:
{a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}.

Liczba permutacji zbioru złożonego z n elementów jest równa

$$P_n = n!$$

Przykład

Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?

Rozwiązanie:

Obliczmy liczbę permutacji zbioru 5-elementowego:

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Czyli pięć osób można ustawić w kolejce na 120 sposobów.

Zad. 1

Na półce stoi sześciotomowe dzieło, oblicz ile istnieje sposobów ustawienia tomów na półce?

Permutacja z powtórzeniami

Zdefiniowane wyżej pojęcie permutacji można rozszerzyć na przypadki, gdy brane są pod uwagę powtórzenia elementów. Permutacja z powtórzeniami rozpatruje przypadki, gdy liczba powtórzeń danego elementu jest ściśle określona.

Permutacją z powtórzeniami zbioru n- elementowego, nazywamy każdy ciąg n- wyrazowy utworzony z elementów tego zbioru, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $\boldsymbol{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}$ razy.

Liczba permutacji z powtórzeniami zbioru n- elementowego, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ razy wyraża się wzorem $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$.

Przykład

Ile wyrazów można utworzyć z liter {M, A, T, E, M, A, T, Y, K, A}?

Wszystkich możliwych ustawień różnych 10-ciu liter jest tyle ile wszystkich permutacji ze zbioru 10-cio elementowego czyli 10!

W naszym zbiorze {M, A, T, E, M, A, T, Y, K, A} litera A występuje 3 razy, litera M występuje 2 razy i litera T występuje 2 razy. Zatem z punktu widzenia losowania, losowane litery {A, M, T} mogą się powtarzać. (Przestawiając ze sobą 3 litery A otrzymamy ten sam wyraz oraz przestawiając ze sobą dwie litery M otrzymamy ten sam wyraz, również zamiana miejscami dwóch liter T daje nam ten sam wyraz.)

3 litery A możemy przestawiać ze sobą na 3! sposobów, dwie litery M możemy przestawiać ze sobą na 2! i dwie litery T możemy przestawiać ze sobą na 2!. Czyli na 3! * 2! * 2! sposobów możemy przestawiać ze sobą powtarzające się litery w taki sposób, że za każdym razem otrzymamy ten sam wyraz.
(zauważmy, że otrzymaliśmy liczbę 3! * 2! * 2! przez to, że pomnożyliśmy przez siebie ilości wszystkich przestawień powtarzających się liczb i otrzymaliśmy ilość przestawień liczb, które tworzą ten sam wyraz, jeśli podzielimy liczbę 3! * 2! * 2! przez 3!, to nie uwzględnimy przestawień litery A, stąd jeśli podzielimy ilość wszystkich przestawień 10! przez ilość przestawień liter, które tworzą nam ten sam wyraz, to otrzymamy szukaną ilość różnych wyrazów)

otrzymamy: $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$ różnych wyrazów.

Zad. 2

Ile różnych wyrazów, mających sens lub nie, można utworzyć, przestawiając litery w wyrazie "*statystyka*"?

Wariacje z powtórzeniami

Wariacją k- elementową z powtórzeniami utworzoną ze zbioru n- elementowego nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych lub nie różniących się elementów z tego zbioru.

Z k- wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n- elementowego mamy do czynienia wówczas, gdy k razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Z trzech danych elementów a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje z powtórzeniami: {a,a},{a,b},{a,c},{b,a},{b,b},{b,c},{c,a},{c,b},{c,c}.

Przykład

Ile słów dwuliterowych (nawet tych bezsensownych) można utworzyć z liter {A,B,C,D}?

Rozwiązanie:

Przykładami taki słów są: AA, DC, CD. Na każde z 2 miejsc możemy wybrać jedną z 4 liter, zatem wszystkich możliwości mamy:

$$4^2 = 16$$

Odpowiedź: Można utworzyć 16 wyrazów.

Zad. 3
Test składa się z 10 pytań. Do każdego pytania są 3 warianty odpowiedzi. Na ile sposobów można rozwiązać cały test?

Wariacje bez powtórzeń

Wariacją k- elementową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n- elementowego (k≤n) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów z tego zbioru.

Wariacje spełniają następujące warunki:
- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów,
- istotna jest kolejność elementów wariacji.

Z k- wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy k razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.
N- wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n- elementowego są permutacjami tego zbioru.

Z trzech danych elementów a, b, c, można utworzyć następujące dwuelementowe wariacje bez powtórzeń: {a,b},{a,c},{b,a},{b,c},{c,a},{c,b

Liczba k- wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n- elementowego wyraża się wzorem:

$$V_n^k = \frac{\mathrm{n!}}{(\mathrm{n-k})!}$$

Przykład

Mamy do dyspozycji 9 drewnianych klocków, na których są pomalowane cyfry od 1 do 9. Ile możemy ułożyć liczb czterocyfrowych, wybierając kolejno bez zwracania 4 klocki?

$$V_n^k = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

Zad. 4
Ile istnieje czterocyfrowych PIN-kodów składających się z różnych cyfr?

Kombinacje bez powtórzeń

Kombinacją k- elementową utworzoną ze zbioru n- elementowego (k≤n) nazywamy każdy k- elementowy podzbiór tego zbioru.

Kombinacje spełniają następujące warunki:
- obejmują jedynie określoną liczbę k spośród danych n elementów.
- nie jest istotna kolejność elementów kombinacji.

Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia. Dwa podzbiory złożone z tych samych elementów, a różniące się tylko ich porządkiem, stanowią tę samą kombinację.

Z trzech danych elementów: a,b,c, można utworzyć następujące dwuelementowe kombinacje: {a,b},{a,c},{b,c}.
Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Przykład

Na ile sposobów można wybrać 3 zawodników w drużynie 12 osobowej?

<u>Rozwiązanie:</u>

$$\begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{6\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{6} = 10\cdot 11\cdot 2 = 220$$

Odpowiedź: Trzech zawodników w drużynie 12 osobowej można wybrać na 220 sposobów.

Zad. 5
Ile jest wszystkich odcinków łączących wierzchołki ośmiokąta wypukłego?

Zad. 6
Ile nastąpi uścisków dłoni, gdy spotka się 3-osobowa grupa znajomych, zakładając, że wita się każdy z każdym?

Zad. 7

Ile nastąpi uścisków dłoni, gdy spotka się 6-osobowa grupa znajomych, zakładając, że wita się każdy z każdym?

Zad. 8

Ile nastąpi uścisków dłoni, gdy spotka się 10-osobowa grupa znajomych, zakładając, że wita się każdy z każdym?

Zad. 9

Na ile sposobów można wybrać pięcioosobową delegację z klasy liczącej 30 uczniów?

Zad. 10

Malarz chce namalować tęcze z wykorzystaniem wszystkich możliwych konfiguracji kolejności występowania jej siedmiu podstawowych kolorów. Ile tęcz malarz musi namalować?

Zad.11

Ile dróg trzeba zbudować, aby połączyć ze sobą dziewięć miejscowości, każda z każdą?

Zad.12

W klasie jest 24 uczniów, w tym 10 dziewcząt. Na ile sposobów można wybrać 2-osobową delegację złożoną z uczennicy i ucznia?

Zad. 13

Z talii liczącej 52 karty losujemy bez zwracania pięć kart. Ile istnieje możliwych wyników losowania, w których otrzymamy dokładnie dwa kiery?

Zad. 14

W urnie znajduje się 10 kul białych i 6 czarnych. Losujemy bez zwracania 4 kule. Ile jest możliwych wyników losowania, w których dokładnie trzy kule będą tego samego koloru?