

## 5. Funkcja kwadratowa

Funkcję  $f(x) = ax^2 + bx + c$  określoną dla  $x \in \mathbf{R}$ , gdzie  $a, b, c$  są stałymi i  $a \neq 0$ , nazywamy **funkcją kwadratową**.

Wykres funkcji kwadratowej nazywamy **parabolą**. Znak współczynnika  $a$  decyduje o tym, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli o równaniu  $y = ax^2 + bx + c$ : do góry ( $a > 0$ ) czy do dołu ( $a < 0$ ).

**Wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$  nazywamy liczbę  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Miejsca zerowe funkcji kwadratowej**

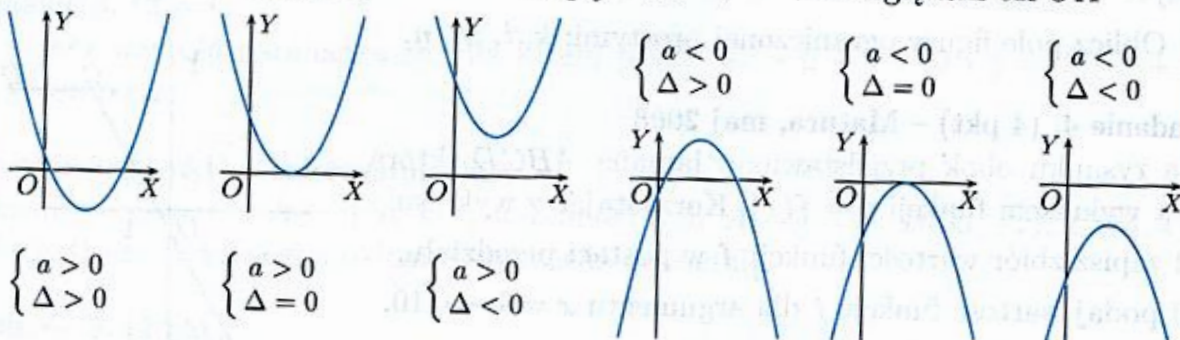
- Jeśli  $\Delta > 0$ , to funkcja ma dwa różne miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Jeśli  $\Delta = 0$ , to funkcja ma jedno miejsce zerowe:  $x_0 = \frac{-b}{2a}$  (nazywamy je pierwiastkiem podwójnym).

- Jeśli  $\Delta < 0$ , to funkcja nie ma miejsc zerowych.

**Położenie wykresu funkcji kwadratowej  $y = ax^2 + bx + c$  względem osi  $OX$**



**Wzór funkcji kwadratowej**

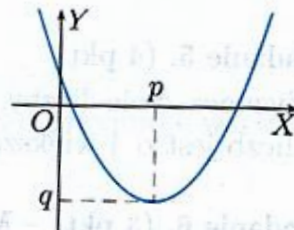
- Postać **ogólna**:  $y = ax^2 + bx + c$ .

Współrzędne wierzchołka paraboli:  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ .

- Postać **kanoniczna**:  $y = a(x - p)^2 + q$ .

Współrzędne wierzchołka paraboli:  $(p, q)$ , gdzie

$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{i} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

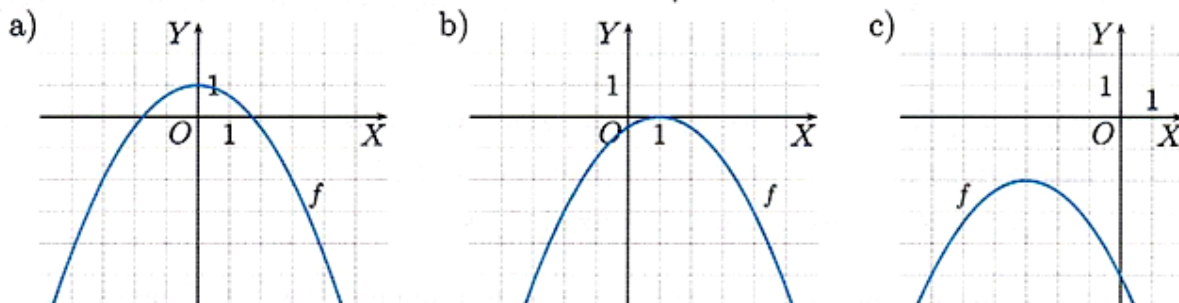


- Postać **iloczynowa**:

- jeśli  $\Delta > 0$ , to  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ , gdzie  $x_1$  i  $x_2$  są miejscami zerowymi;
- jeśli  $\Delta = 0$ , to  $y = a(x - x_0)^2$ , gdzie  $x_0$  jest miejscem zerowym;
- jeśli  $\Delta < 0$ , to nie istnieje postać iloczynowa.

## Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Wykres funkcji  $f$  przedstawiony na rysunku powstał w wyniku przesunięcia paraboli  $y = -\frac{1}{3}x^2$ . Podaj wzór funkcji  $f$ .



2. Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej. Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej zbiór wartości.

a)  $f(x) = -x^2 + 4x - 4$       b)  $f(x) = x^2 + 6x$       c)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$

3. Podaj punkty przecięcia wykresu funkcji  $f$  z osiami układu współrzędnych. Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaciach iloczynowej i kanonicznej oraz naszkicuj jej wykres.

a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$       b)  $f(x) = -x^2 - 4x + 5$       c)  $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$

4. Wyznacz przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości funkcji  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + 7$       b)  $f(x) = -5x^2 - 15x + 1$       c)  $f(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x - 2$

5. Wykresem funkcji  $f(x) = 2x^2 + bx + c$  jest parabola o wierzchołku w punkcie  $W$ . Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  oraz podaj najmniejszą wartość funkcji  $f$ .

a)  $W(0, 2)$       b)  $W(0, 0)$       c)  $W(2, 5)$       d)  $W(-1, -3)$

6. Wyznacz współczynnik  $c$  taki, aby zbiorem wartości funkcji  $f(x) = -x^2 + 2x + c$  był podany przedział. Podaj wzór tej funkcji w postaci kanonicznej.

a)  $(-\infty; -2)$       b)  $(-\infty; 0)$       c)  $(-\infty; 4)$       d)  $(-\infty; 3\sqrt{2})$

7. Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$  i zapisz jej wzór w postaci iloczynowej (jeśli jest to możliwe). Naszkicuj wykres funkcji  $f$  i odczytaj z niego, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

a)  $f(x) = x^2 + 4x - 5$       b)  $f(x) = -x^2 + x + 6$       c)  $f(x) = 2x^2 + 7x - 4$

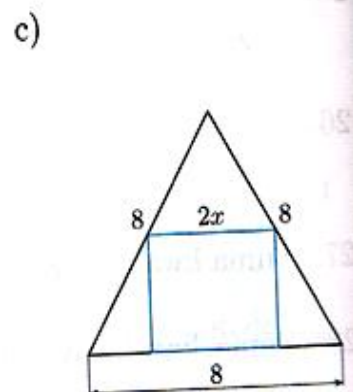
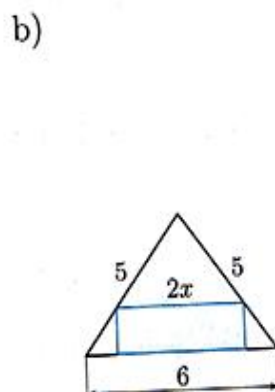
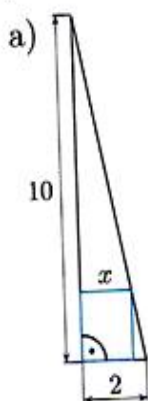
8. Do wykresu funkcji kwadratowej  $f(x) = x^2 + bx + c$  należą punkty  $A$  i  $B$ . Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaciach kanonicznej i iloczynowej.

a)  $A(-1, 0), B(5, 0)$       b)  $A(1, 0), B(0, -3)$       c)  $A(2, 2), B(3, 1)$

9. a) Wykres funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + 1$  jest symetryczny względem prostej  $x = 2$ , a wartość najmniejsza funkcji  $f$  jest równa  $-3$ . Napisz równanie tej funkcji w postaci ogólnej.
- b) Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = a(x+1)(x-3)$ , której największa wartość jest równa  $8$ . Wyznacz współczynnik  $a$  oraz przedstaw wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej.
10. Wyznacz współczynnik  $a$  we wzorze funkcji kwadratowej  $f(x) = a(x+1)^2 - 4$ :
- a) jeśli wykres funkcji  $f$  przechodzi przez punkt  $P(2, 14)$ ,
- b) jeśli jednym z miejsc zerowych funkcji  $f$  jest  $1$ .
11. Funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx - 4$  jest malejąca w przedziale  $(-\infty; -1)$  i rosnąca w przedziale  $(-1; \infty)$ . Wierzchołek paraboli będącej wykresem tej funkcji należy do prostej  $y = 3x - 1,5$ . Zapisz wzór funkcji  $f$  w postaci kanonicznej. Wyznacz miejsca zerowe tej funkcji.
12. Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$  funkcji kwadratowej  $f(x) = 2x^2 + bx + c$ , jeśli:
- a) funkcja  $f$  ma tylko jedno miejsce zerowe  $x_0 = 2$ ,
- b) funkcja  $f$  osiąga wartość najmniejszą równą  $3$ , a jej wykres jest symetryczny względem prostej  $x = 1$ ,
- c) funkcja  $f$  przyjmuje wartości niedodatnie tylko dla  $x \in (1; 4)$ ,
- d) zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $(-1; \infty)$ , a jej wykres przecina oś  $OY$  w punkcie  $(0, 1)$ .
13. Wyznacz wszystkie wartości współczynników  $a$ ,  $b$  i  $c$ , dla których funkcja  $f$  nie ma miejsc zerowych.
- a)  $f(x) = ax^2 + 4x + 2$       b)  $f(x) = x^2 + bx + 1$       c)  $f(x) = -x^2 + 6x + c$
14. Jednym z rozwiązań równania  $x^2 - 6x + c = 0$  jest liczba  $3 - \sqrt{2}$ . Wyznacz współczynnik  $c$  i znajdź drugie rozwiązanie.
15. Rozwiąż równanie.
- a)  $9x^2 - 4 = 0$       b)  $x^2 + 2x = 0$       c)  $6x - 9 = x^2$       d)  $4x - 4x^2 = 1$
16. Rozwiąż równanie.
- a)  $2(x+1)^2 = 5(4-x)$       b)  $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$       c)  $\sqrt{3}x^2 - 9x + 6\sqrt{3} = 0$
17. Rozwiąż nierówność.
- a)  $x^2 - 9 > 0$       c)  $x^2 + 16 \geq 8x$       e)  $2x^2 + 5x - 3 > 0$   
b)  $6x^2 + 3x \geq 0$       d)  $2x^2 - 2 + 3x \leq 0$       f)  $-3x^2 - 2x + 1 \leq 0$

18. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji  $f$ .
- a)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10}$       b)  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - 16}}$       c)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x^2 + x - 12}}$
19. Dane są funkcje  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  i  $g(x) = x - 3$ . Rozwiąż nierówność.
- a)  $f(x) > g(x)$       b)  $f(x) - x \cdot g(x) \geq 0$       c)  $2f(x) + 4g(x) < -10$
20. Wykaż, że dla  $p = -3$  nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.
- a)  $px^2 + \sqrt{2}x + p < 0$       b)  $x^2 + px - 2p > 0$       c)  $px^2 + (1 - 2p)x + 3p < 0$
21. Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których prosta  $y = m$  ma dwa punkty wspólne z wykresem funkcji  $f$ .
- a)  $f(x) = x^2 - 1$       b)  $f(x) = -4x^2 - 2x$       c)  $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$
22. Podaj współrzędne punktów przecięcia prostej  $l$  z wykresem funkcji  $f$ .
- a)  $l: y = -1, f(x) = x^2 - 2x$       c)  $l: y = x - 1, f(x) = 2x^2 + 7x + 3$   
 b)  $l: y = -2, f(x) = -x^2 - x + 18$       d)  $l: y = 2x - 1, f(x) = -x^2 + 2x + 8$
23. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.
- a)  $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$
24. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  w podanym przedziale.
- a)  $f(x) = -x^2 + 4x + 1, \langle 0; 3 \rangle$       d)  $f(x) = -x^2 + 6x + 1, \langle -2; 2 \rangle$   
 b)  $f(x) = x^2 - 4x + 5, \langle -1; 1 \rangle$       e)  $f(x) = -3x^2 - 6x + 2, \langle -2; 0 \rangle$   
 c)  $f(x) = 2x^2 + 8x + 3, \langle -3; 1 \rangle$       f)  $f(x) = 2x^2 + 2x + 1, \langle -1; 3 \rangle$
25. Kwadrat pewnej liczby jest o 270 większy od jej potrojonej wartości. Znajdź tę liczbę.
26. Iloczyn dwóch liczb jest równy 225. Znajdź te liczby, jeżeli jedna z nich jest o 7 większa od podwojonej drugiej liczby.
27. Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych wynosi 925. Znajdź te liczby.
28. Suma kwadratów dwóch kolejnych nieparzystych liczb naturalnych wynosi 650. Znajdź te liczby.
29. Wyznacz dwie kolejne liczby naturalne, których suma jest większa od 23, a suma ich kwadratów jest mniejsza od 365.

30. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość sumy kwadratów dwóch liczb  $x$  i  $y$ , jeśli:
- a)  $x + y = 2$ ,      b)  $x - y = 3$ ,      c)  $3x + y = 0$ ,      d)  $2x - y = 1$ .
31. Wyznacz największą możliwą wartość iloczynu dwóch liczb  $x$  i  $y$ , jeśli:
- a)  $x + y = 6$ ,      b)  $2x + y = 4$ ,      c)  $4x + 2y = 1$ ,      d)  $x + y = 0$ .
32. Suma dwóch liczb jest równa 10. Wyznacz te liczby, tak aby suma potrojonego kwadratu jednej z nich i kwadratu drugiej była jak najmniejsza.
33. Jakie wymiary powinien mieć prostokąt o obwodzie 20 cm, aby jego pole było jak największe?
34. Mamy 58 m bieżącej siatki ogrodzeniowej. Zamierzamy ogrodzić prostokątny ogródek o jak największej powierzchni. Jakie powinien on mieć wymiary, jeśli na jednym z boków trzeba zostawić nieogrodzone 2 m na furtkę?
35. Obwód prostokąta jest równy 8. Wyznacz długości jego boków, tak aby prostokąt miał jak najkrótszą przekątną.
36. Wysokość prostopadłościanu jest równa 3 cm, a jego podstawą jest prostokąt o obwodzie 16 cm. Jakie powinny być wymiary podstawy tego prostopadłościanu, by jego pole powierzchni całkowitej było jak największe? Oblicz objętość takiego prostopadłościanu.
37. Przekrój osiowy walca jest prostokątem o obwodzie 12. Oblicz największe możliwe pole powierzchni bocznej takiego walca.
38. Przedstaw pole  $P$  prostokąta (rysunek niżej) jako funkcję zmiennej  $x$  i podaj jej dziedzinę. Dla jakiego argumentu pole jest największe? Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu.



## Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

1. Wykres funkcji  $f$  (rysunek obok) powstał w wyniku przesunięcia paraboli  $y = \frac{1}{3}x^2$ . Dla  $x = 10$  funkcja  $f$  przyjmuje wartość:

A. 24,            B. 29,            C.  $33\frac{1}{3}$ ,            D.  $35\frac{1}{3}$ .

2. Wierzchołek paraboli  $y = x^2 + 4x$  leży na prostej danej równaniem:

A.  $y = -x$ ,            B.  $y = x$ ,            C.  $y = 2x$ ,            D.  $y = 4x$ .

3. Wykresem funkcji  $f(x) = (6 - \sqrt{2}a)x^2 + 4x - 8$  jest parabola o ramionach skierowanych w dół, jeśli:

A.  $a \in (-\infty; -3\sqrt{2})$ ,            C.  $a \in (-3\sqrt{2}; \infty)$ ,  
 B.  $a \in (-\infty; 0)$ ,            D.  $a \in (3\sqrt{2}; \infty)$ .

4. Jeśli funkcja  $f(x) = ax^2 - 2x + \frac{1}{2}$  ma dwa różne miejsca zerowe, to  $a$  może być równe:

A. 1,            B. 2,            C. 3,            D.  $\sqrt{5}$ .

5. Wierzchołek paraboli  $y = 2x^2 + bx + 1$  leży poniżej osi  $OX$  dla:

A.  $b \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \infty)$ ,            C.  $b \in (-2; 2)$ ,  
 B.  $b \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ ,            D.  $b \in (1; 2)$ .

6. Wskaż nierówność, którą spełnia każda liczba rzeczywista.

A.  $6x^2 + x + 1 > 0$             C.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$   
 B.  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8} > 0$             D.  $x^2 - 100x + 25 \geq 0$

7. Nierówność  $(3x + 1)^2 + (x - 2)^2 < 5$  jest spełniona przez pewną liczbę:

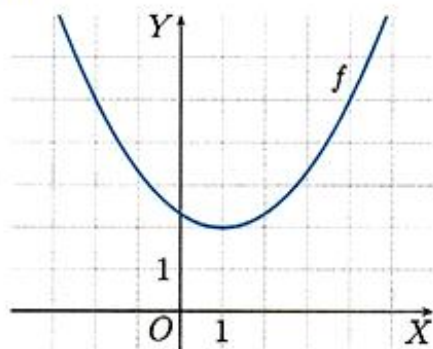
A. całkowitą nieujemną,            C. niewymierną nieujemną,  
 B. całkowitą ujemną,            D. wymierną ujemną.

8. Dziedzina funkcji  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$  jest zbiór:

A.  $\langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$ ,            C.  $\mathbf{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$ ,  
 B.  $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup \langle \sqrt{2}; \infty \rangle$ ,            D.  $\mathbf{R}$ .

9. Pole trójkąta prostokątnego jest równe  $30 \text{ cm}^2$ . Jedna przyprostokątna jest o  $7 \text{ cm}$  dłuższa od drugiej. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość:

A.  $8 \text{ cm}$ ,            B.  $10 \text{ cm}$ ,            C.  $13 \text{ cm}$ ,            D.  $15 \text{ cm}$ .



## Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

### Zadanie 1. (2 pkt)

Wypisz wszystkie liczby całkowite spełniające nierówność  $x(x+2) < 8$ .

### Zadanie 2. (2 pkt) – Matura, maj 2010

Rozwiąż nierówność  $x^2 - x - 2 \leq 0$ .

### Zadanie 3. (2 pkt) – Informator CKE

Rozwiąż nierówność  $3x^2 > 8x + 3$ .

### Zadanie 4. (2 pkt)

Wyznacz wszystkie argumenty, dla których funkcja  $f(x) = 4x^2 - x - 3$  przyjmuje wartości niedodatnie.

### Zadanie 5. (2 pkt)

Wyznacz współczynnik  $b$  funkcji kwadratowej  $f(x) = 2x^2 + bx + 8$ , wiedząc, że ma ona tylko jedno miejsce zerowe.

### Zadanie 6. (2 pkt)

Wyznacz współczynnik  $b$  funkcji kwadratowej  $f(x) = -x^2 + bx + 1$ , wiedząc, że prosta  $x = 3$  jest osią symetrii wykresu tej funkcji.

### Zadanie 7. (2 pkt)

Dany jest trójmian  $y = x^2 + bx + c$ . Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$ , wiedząc, że trójmian osiąga najmniejszą wartość równą 4 dla  $x = -2$ .

### Zadanie 8. (2 pkt)

Wyznacz współczynnik  $a$  funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + 2x - 1$ , wiedząc, że współrzędna  $y$  wierzchołka wykresu funkcji  $f$  jest równa 2.

### Zadanie 9. (2 pkt)

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji  $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$  w przedziale  $\langle -2; 0 \rangle$ .

### Zadanie 10. (2 pkt) – Informator CKE

Wyznacz wartość najmniejszą i wartość największą funkcji  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$  w przedziale  $\langle -1; 2 \rangle$ .

### Zadanie 11. (2 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których prosta  $y = m$  nie ma punktów wspólnych z wykresem funkcji  $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ .

### Zadanie 12. (2 pkt)

Suma pewnej liczby i jej kwadratu wynosi 272. Znajdź tę liczbę.

## Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

### Zadanie 1. (4 pkt)

Wyznacz współczynnik  $m$  taki, aby przedział  $(-1; \infty)$  był zbiorem wartości funkcji kwadratowej  $y = x^2 + mx + 1$ .

### Zadanie 2. (5 pkt)

Liczby  $-2$  i  $4$  są miejscami zerowymi funkcji  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ .

- Wyznacz współczynniki  $b$  i  $c$ , a następnie naszkicuj wykres funkcji  $f$ .
- Dla jakich wartości  $x$  wykres funkcji  $f$  leży powyżej wykresu funkcji  $g(x) = x + 2$ ?

### Zadanie 3. (5 pkt) – Matura, maj 2009

Wykres funkcji  $f$  danej wzorem  $f(x) = -2x^2$  przesunięto wzdłuż osi  $OX$  o 3 jednostki w prawo i wzdłuż osi  $OY$  o 8 jednostek w górę; powstał wykres funkcji  $g$ .

- Rozwiąż nierówność  $f(x) + 5 < 3x$ .
- Podaj zbiór wartości funkcji  $g$ .
- Funkcja  $g$  określona jest wzorem  $g(x) = -2x^2 + bx + c$ . Oblicz  $b$  i  $c$ .

### Zadanie 4. (5 pkt)

Naszkicuj wykres funkcji  $f$ . Wyznacz jej miejsca zerowe oraz przedziały monotoniczności.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{dla } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

### Zadanie 5. (5 pkt) – Matura, maj 2008

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej  $f(x) = (2x + 1)(x - 2)$  w przedziale  $(-2; 2)$ .

### Zadanie 6. (4 pkt)

Zdjęcie o wymiarach  $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$  oprawiono w prostokątną ramkę o jednakowej szerokości. Jaka jest szerokość ramki, jeśli pole zdjęcia wraz z ramką wynosi  $651 \text{ cm}^2$ ?

### Zadanie 7. (6 pkt)

Suma obwodów prostokąta o stosunku boków  $1:2$  i prostokąta o stosunku boków  $1:3$  jest równa  $40$ . Przy jakich długościach boków takich prostokątów suma ich pól jest najmniejsza?

### Zadanie 8. (5 pkt) – Matura próbna, styczeń 2009

Doświadczalnie ustalono, że czas  $T(n)$ , liczony w sekundach, potrzebny na alfabetyczne ułożenie  $n$  kartek z nazwiskami wyraża się, z dobrym przybliżeniem, wzorem  $T(n) = an^2 + bn$ . Ułożenie 10 kartek trwa średnio 20 sekund, a 30 kartek średnio 90 sekund. Wyznacz wzór funkcji  $T(n)$  i oblicz, ile kartek można ułożyć średnio w ciągu 50 sekund.