

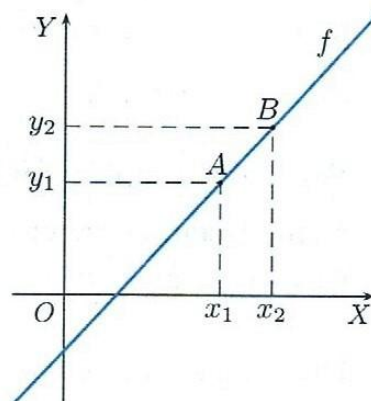
4. Funkcja liniowa

Funkcją liniową nazywamy funkcję określoną wzorem $f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi.

Wykresem funkcji liniowej jest prosta. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej $y = ax + b$.

Współczynnik kierunkowy prostej $y = ax + b$ przechodzącej przez dwa różne punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ takie, że $x_1 \neq x_2$, jest równy

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



Funkcja liniowa określona wzorem $f(x) = ax + b$ jest:

- **rosnąca** dla $a > 0$,
- **malejąca** dla $a < 0$,
- **stała** dla $a = 0$.

Proste $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są:

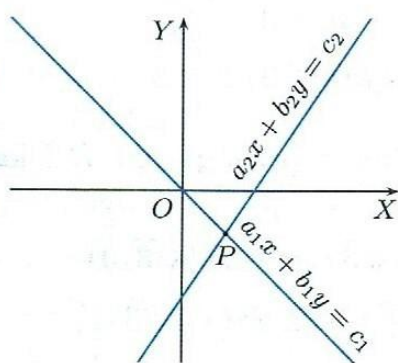
- **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$,
- **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Układ równań liniowych

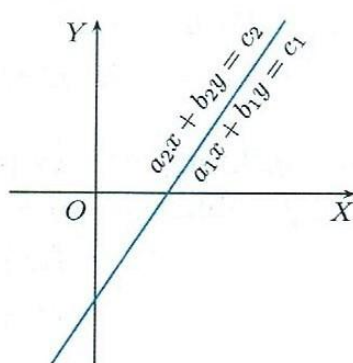
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nazywamy:

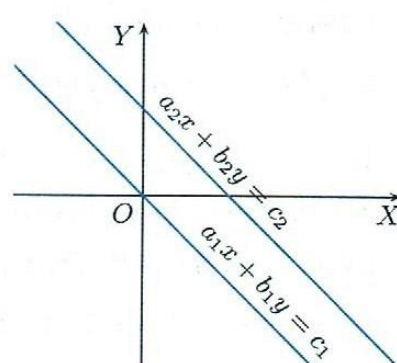
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



Układ oznaczony – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



Układ nieoznaczony – oba równania opisują tę samą prostą.

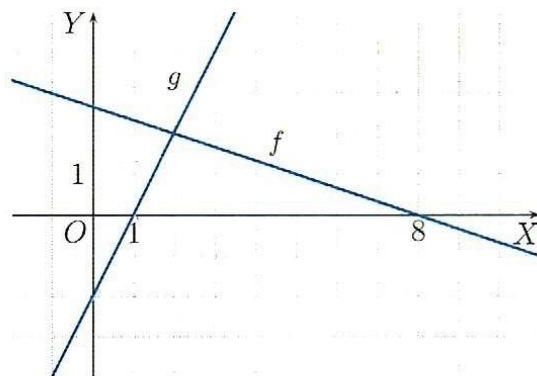


Układ spreczny – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

- Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne. Oblicz pole figury ograniczonej wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych.
 - $f(x) = 6x + 3$
 - $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$
 - $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$
- Wyznacz współczynnik b , jeżeli:
 - miejszem zerowym funkcji $f(x) = 3x + b$ jest 2,
 - wykreś funkcji $f(x) = 3x + b$ przechodzi przez punkt $(1, 2)$.
- Dla jakich wartości współczynnika b funkcja liniowa $f(x) = 2x + b$:
 - dla argumentu 3 przyjmuje wartość większą od 4,
 - ma miejsce zerowe mniejsze od 2?
- Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja $f(x) = -2x + 3$ przyjmuje wartości należące do przedziału:
 - $(-3; 5)$,
 - $(-5\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$,
 - $\langle 1 - 2\sqrt{2}; 0 \rangle$.
- Wyznacz wzór funkcji liniowej, która spełnia podane warunki.
 - $f(\frac{1}{3}) = 3$ i $f(-\frac{2}{3}) = 0$
 - $f(\sqrt{2}) = 6$ i $f(2) = 6$
- Wyznacz równanie prostej AB . Sprawdź, czy należy do niej punkt C .
 - $A(-2, 6)$, $B(2, -2)$, $C(5, 8)$
 - $A(-1, 7)$, $B(-9, -1)$, $C(1, 9)$
- Określ monotoniczność funkcji f .
 - $f(x) = (1 - \sqrt{3})x + 1$
 - $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x + 4$
- Określ monotoniczność funkcji f dla $m = -2$, $m = -1$ i $m = 0$.
 - $f(x) = (-3 - \frac{3}{2}m)x - 7$
 - $f(x) = (\sqrt{3}m + 3)x + 2$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej g , której wykres przechodzi przez punkt P i jest równoległy do wykresu funkcji f . Oblicz $g(-6)$.
 - $f(x) = 3x + 2$, $P(2, 2)$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $P(4, 2)$
 - $f(x) = -\sqrt{3}x + 5$, $P(\sqrt{3}, 0)$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 2$, $P(-4\sqrt{3}, 1)$
- Wyznacz wzór funkcji liniowej g , której wykres przechodzi przez punkt P i jest prostopadły do wykresu funkcji f . Wyznacz miejsce zerowe funkcji g .
 - $f(x) = -4x$, $P(4, 2)$
 - $f(x) = 2x + 1$, $P(-6, 2)$
 - $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$, $P(1, 4)$
 - $f(x) = \sqrt{2}x + 1$, $P(\sqrt{2}, -1)$

11. Wyznacz wartość parametru m , dla której proste k i l są równoległe.
 a) $k: y = -2x - 9, l: y = 4mx + 1$ b) $k: y = 3mx + 2, l: y = (2m - 4)x - 1$
12. Wyznacz wartość parametru m , dla której proste k i l są prostopadłe.
 a) $k: y = x - 3, l: y = 2mx + 2$ b) $k: y = \frac{1}{3}x + 1, l: y = (1 - 2m)x + 6$
13. Dane są punkty $A(-2, 4), B(2, 1)$. Napisz równanie prostej k prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt $(3, 6)$. Określ monotoniczność funkcji, której wykresem jest prosta k . Dla jakich argumentów funkcja, której wykresem jest prosta k , przyjmuje wartości ujemne?
14. Dla jakiej wartości parametru a miejscem zerowym funkcji f jest liczba x_0 ?
 a) $f(x) = (1 + a)x + 2, x_0 = 4$ c) $f(x) = (a + \sqrt{2})x - 2, x_0 = \sqrt{2}$
 b) $f(x) = (3a - 2)x - 10, x_0 = -2$ d) $f(x) = (\sqrt{3} - 3a)x - 18, x_0 = 3\sqrt{3}$
15. Rozwiąż równanie.
 a) $\sqrt{5}x - 5 = \sqrt{5} + 5$ c) $2x + \sqrt{3}x = 2$ e) $x + 3 = 4 - \sqrt{7}x$
 b) $1 - 2\sqrt{5}x = 3\sqrt{5}$ d) $3x - \sqrt{3}x = \sqrt{3} + 3$ f) $4x - \sqrt{6} = \sqrt{6}x - 3$
16. Rozwiąż równanie.
 a) $(x + 5)(5 - x) = 5x - x^2$ c) $(x + 3)(x - 3) = x(x + 9) - 9(x + 1)$
 b) $(\sqrt{2} - x)^2 - (x - 2\sqrt{2})^2 = -6$ d) $(\frac{1}{2}x + 2)(2 - \frac{1}{2}x) + (1 + \frac{1}{2}x)^2 = 0$
17. Rozwiąż nierówność.
 a) $(2x - 3)(3 + 2x) \leq (2x - 1)^2$ c) $(3x + 5)^2 < 9(x - 2)^2$
 b) $(2\sqrt{3} - x)^2 \geq (x - 3\sqrt{3})^2$ d) $3 < -4(3 - x)^2 - (2x + 3)(3 - 2x)$
18. Podaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru a .
 a) $(2 - a)x = 3 + x$ b) $(4x - 1)a = 3a + xa$ c) $3x + 2a = 3 + 6ax$
19. Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych f i g .
 a) Wyznacz wzór funkcji g i oblicz $g(-49)$.
 b) Wyznacz wzór funkcji f i oblicz pole trójkąta ograniczonego przez wykres funkcji f i osie układu współrzędnych.
 c) Dla jakich argumentów funkcje f i g jednocześnie przyjmują wartości dodatnie?



20. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ równań.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2y = 5 \\ x - 2 = 4 + 2y \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} y = \frac{x-2y+4}{3} \\ y + 3 = 4x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 0,5x + 0,75y = 2 \\ 0,25y = 3 + x \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ y + 2 = \frac{3(1-x)+4}{2} \end{cases}$$

21. Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji f i g .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x < 4 \\ x - 6 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq -5 \\ -2x - 8 & \text{dla } x > -5 \end{cases}, \quad g(x) = -\frac{2}{3}x - 4$$

22. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 8. Jeżeli cyfry w tej liczbie zamienimy miejscami, to otrzymamy liczbę o 18 większą. Wyznacz liczbę początkową.

23. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 12. Jeżeli od cyfry dziesiątek odejmiemy 6, a do cyfry jedności dodamy 6, to otrzymamy liczbę złożoną z tych samych cyfr, ale ustawionych w odwrotnej kolejności. Wyznacz liczbę początkową.

24. a) Sławek jest o 5 lat starszy od Janka. Dziesięć lat temu Sławek był dwa razy starszy od Janka. Ile lat ma każdy z chłopców?

b) Sześć lat temu Basia była o 25% młodsza od Ani. Teraz Ania i Basia mają razem 33 lata. Ile lat ma każda z dziewczynek?

25. Marysia i Bogdan są małżeństwem od 24 lat, w dniu ślubu mieli razem 54 lata. Za rok Marysia będzie dokładnie dwa razy starsza niż w dniu ślubu. Ile lat ma teraz Marysia, a ile – Bogdan?

26. Gosia rozpoczyna pracę w kwiaciarni. Zaproponowano jej stawkę dzienną w wysokości 40 zł, plus 1 zł 50 gr za każdą sprzedaną wiązaną kwiatów. Podaj wzór opisujący wysokość jej pensji tygodniowej y (za 5 dni pracy) w zależności od liczby x sprzedanych wiązań. Oblicz, ile wiązań kwiatów musiałaby sprzedać w ciągu 5 dni, aby zarobić w tym czasie 425 zł.

27. Funkcja $k(x) = 1000 + 20x$ opisuje koszty (w złotych), jakie dziennie ponosi firma produkująca plecaki. 1000 zł to koszt stały, 20 zł to koszt wyprodukowania jednego plecaka, x – liczba plecaków. Funkcja $p(x) = 130x$ opisuje dzienny przychód ze sprzedaży x plecaków. Ile plecaków dziennie należy wyprodukować – przy założeniu, że wszystkie zostaną sprzedane – aby dzienny zysk był większy od 5000 zł?

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

- Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{4}{3}x - 4$ nie należy punkt:
A. $(-3, 0)$, B. $(-\frac{3}{4}, -3)$, C. $(1\frac{1}{8}, -7)$, D. $(6\frac{3}{4}, -13)$.
- Jeśli wykres funkcji $f(x) = -3x - 2b$ przecina oś OY w punkcie, którego rzędna jest równa 6, to wykres funkcji $g(x) = 2x + \frac{1}{3}b$ przecina oś OY w punkcie, którego rzędna jest równa:
A. -1 , B. $-\frac{2}{3}$, C. $\frac{1}{3}$, D. 2 .
- Funkcja $f(x) = -3x + 1$ przyjmuje wartości należące do przedziału $\langle 4; 10 \rangle$ dla wszystkich argumentów należących do przedziału:
A. $\langle -10; -4 \rangle$, C. $\langle -3\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3} \rangle$,
B. $\langle -9; -3 \rangle$, D. $\langle -3; -1 \rangle$.
- Współczynnik kierunkowy prostej $y = 1\frac{1}{3}x - (2\frac{1}{2}x - (1\frac{3}{5}x - 2\frac{5}{8}))$ jest równy:
A. $\frac{5}{12}$, B. $\frac{13}{30}$, C. $-\frac{4}{15}$, D. $-\frac{11}{18}$.
- Ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} 2x - 4y = 2 \\ 2y - x = -1 \end{cases}$?
A. jedno C. nieskończenie wiele
B. dwa D. układ jest sprzeczny
- Funkcja liniowa f spełnia warunki: $f(-\sqrt{3}) = 1$ i $f(2\sqrt{3}) = -5$. Wynika z tego, że prosta będąca wykresem tej funkcji przechodzi przez następujące ćwiartki układu współrzędnych:
A. I, II, III, B. I, II, IV, C. I, III, IV, D. II, III, IV.
- Funkcja $f(x) = (1 - \sqrt{2}m)x - 4$ jest malejąca dla m równego:
A. $-2\sqrt{2}$, B. $1 - \sqrt{2}$, C. $\sqrt{2} - 1$, D. $2\sqrt{2} - 1$.
- Liczba będąca rozwiązaniem równania $(x + 2)^2 = (x - 1)^2$ jest miejscem zerowym funkcji:
A. $f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, C. $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$,
B. $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, D. $f(x) = -\frac{1}{3}x - 2$.
- Funkcja liniowa przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla argumentów większych od 3, a jej wykres przechodzi przez punkt $(2, -4)$. Wynika z tego, że pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych jest równe:
A. 18, B. 12, C. 10, D. 8.

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt)

Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt $(-2, 4)$. Funkcja przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla argumentów większych od 2. Podaj wzór tej funkcji.

Zadanie 2. (2 pkt)

Wyznacz wzór funkcji liniowej f , jeśli $f(2) = 7$ i $f(-1) = -2$.

Zadanie 3. (2 pkt)

Określ monotoniczność funkcji $f(x) = (4 - \sqrt{2}m)x + 2$ dla $m = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1$.

Zadanie 4. (2 pkt)

Napisz równanie prostej równoległej do prostej $6x + 2y - 1 = 0$, przechodzącej przez punkt $(-1, 5)$.

Zadanie 5. (2 pkt)

Napisz równanie prostej prostopadłej do prostej $x - 3y + 6 = 0$, przechodzącej przez punkt $(-1, 2)$.

Zadanie 6. (2 pkt)

Wyznacz wartość parametru m , dla której proste $3x - y + 4 = 0$ i $y = \frac{m-1}{2}x + 2$ są prostopadłe.

Zadanie 7. (2 pkt) – Informator CKE

Sprawdź, czy czworokąt $ABCD$ o współrzędnych $A(-3, -1)$, $B(53, -2)$, $C(54, 4)$, $D(-2, 3)$ jest równoległobokiem. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8. (2 pkt)

Wyznacz miejsca zerowe funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ 4x + 2 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

Zadanie 9. (2 pkt)

Uzasadnij, że dla $x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ funkcja liniowa $f(x) = \sqrt{2}x - 2\sqrt{3}$ przyjmuje wartość całkowitą.

Zadanie 10. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $2x - \sqrt{6} = \sqrt{6}x - 2$.

Zadanie 11. (2 pkt)

Oblicz wartość parametru a , dla której miejscem zerowym funkcji $f(x) = \frac{1-a}{2}x + 2$ jest liczba 4.

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (5 pkt)

Dana jest funkcja $f(x) = (2 - a)x + 4$. Wyznacz a , jeśli:

- punkt $A(-2, 6)$ należy do wykresu funkcji f ;
- wykresy funkcji f i $g(x) = -2x + 2$ przecinają oś OX w tym samym punkcie.

Zadanie 2. (4 pkt)

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = ax + 2$ jest liczba $\frac{1}{2}$. Wyznacz wzór funkcji f i podaj argumenty, dla których wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -3x + 4$.

Zadanie 3. (6 pkt)

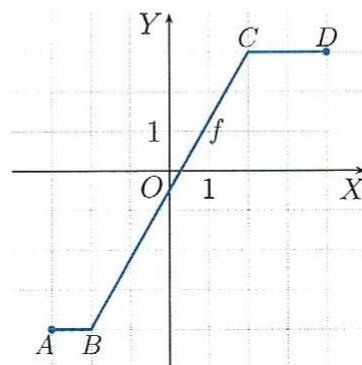
Dane są proste $k: y = -\frac{4}{3}x + 5$, $l: y = \frac{4}{3}x + 5$.

- Napisz równanie prostej m przechodzącej przez punkt $(0, -3)$, równoległej do prostej k .
- Napisz równanie prostej n przechodzącej przez punkt $(\frac{3}{2}, -1)$, równoległej do prostej l .
- Oblicz pole figury ograniczonej prostymi: k, l, m, n .

Zadanie 4. (4 pkt) – Matura, maj 2008

Na rysunku obok przedstawiono łamaną $ABCD$, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$. Korzystając z wykresu:

- zapisz zbiór wartości funkcji f w postaci przedziału,
- podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,
- wyznacz równanie prostej BC ,
- oblicz długość odcinka BC .



Zadanie 5. (4 pkt)

Wyznacz dwie liczby, których suma jest 6,5 raza większa od ich różnicy, a jedna z liczb jest o 4 większa od drugiej.

Zadanie 6. (3 pkt) – Matura, maj 2009

Dwaj rzemieślnicy przyjęli zlecenie wykonania wspólnie 980 detali. Zaplanowali, że każdego dnia pierwszy z nich wykona m , a drugi n detali. Obliczyli, że razem wykonają zlecenie w ciągu 7 dni. Po pierwszym dniu pracy pierwszy z rzemieślników rozchorował się i wtedy drugi, aby wykonać całe zlecenie, musiał pracować o 8 dni dłużej niż planował (nie zmieniając liczby wykonywanych codziennie detali). Oblicz m i n .