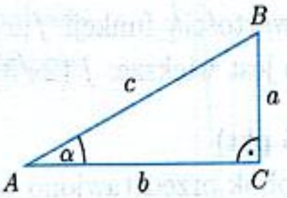
8. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$



α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

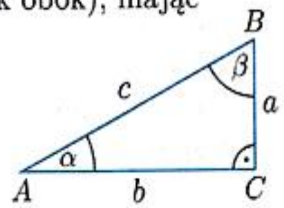
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Rozwiązaniem trójkąta nazywamy wyznaczenie długości wszystkich jego boków i miar wszystkich jego kątów.

Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego ABC (rysunek obok), mając dane:



a) $c = 15$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, c) $b = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\beta = 2 + \sqrt{3}$,

b) $a = 14$, $\sin\beta = \frac{24}{25}$, d) $c = \sqrt{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$.

2. Rozwiąż trójkąt prostokątny ABC, mając dane:

a) $\alpha = 45^\circ$, $c = 8$, b) $\beta = 30^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$, c) $a = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{6} - 4$.

3. Rozwiąż trójkąt prostokątny (długości boków podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku), jeżeli:

a) długość przeciwprostokątnej jest równa 10, a jeden z kątów ma miarę 50°,

b) długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta o mierze 35° jest równa 6.

4. W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β dłuższa przyprostokątna leży naprzeciwko kąta α. Oblicz $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$, jeżeli jedna z przyprostokątnych:

a) jest cztery razy dłuższa od drugiej, b) jest o 60% krótsza od drugiej.

5. Wyznacz miary kątów trójkąta prostokątnego, którego kąt ostry α spełnia warunek:

a) $\operatorname{tg}\alpha = 2\sin\alpha$, b) $\sin\alpha - \cos\alpha = 0$.

6. Oblicz. Nie korzystaj z tablic ani kalkulatora.

a) $2 - \sin^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ$

b) $(\sin 28^\circ + \cos 28^\circ)^2 + (\sin 28^\circ - \cos 28^\circ)^2$

c) $\cos^2 81^\circ(1 + \mathrm{tg}^2\, 81^\circ)$

d) $\dfrac{\sin^3 1^\circ + \mathrm{tg}\, 1^\circ \cdot \cos^3 1^\circ}{2 \sin 1^\circ}$

7. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ b) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ c) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{60}{11}$ d) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$

8. Oblicz tangens kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\sin^2\alpha = 0{,}36$, b) $9\cos^2\alpha - 25\sin^2\alpha = 0$, c) $9\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$.

9. Uprość wyrażenie tak, aby występowała w nim tylko jedna funkcja trygonometryczna kąta ostrego α.

a) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

b) $\cos^3\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$

c) $\sin^3\alpha + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$

d) $\mathrm{tg}^2\alpha(1 - \sin^2\alpha)$

e) $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{2\cos\alpha}$

f) $\dfrac{6\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

10. Kąt α jest ostry, a $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia.

a) $1 - 3\cos^2\alpha$ b) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha$ c) $\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}{\cos\alpha}$

11. Kąt α jest kątem ostrym. Uzupełnij zdanie.

a) Jeżeli $\sin(90^\circ - \alpha) = 0{,}17$, to $\cos\alpha = \ldots$

b) Jeżeli $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{9}$, to $\mathrm{tg}\,\alpha = \ldots$

c) Jeżeli $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{7}{25}$, to $\cos\alpha = \ldots$

12. Uzasadnij równość.

a) $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ = 1$

b) $\cos 17^\circ - \sin 73^\circ = 0$

c) $\mathrm{tg}\, 15^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 45^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 75^\circ = 1$

d) $\mathrm{tg}\, 66^\circ \cdot \cos 66^\circ - \cos 24^\circ = 0$

13. Uzasadnij równość dla dowolnego kąta ostrego α.

a) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

b) $\cos^2\alpha \cdot (\mathrm{tg}^2\alpha + 1) = 1$

c) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \mathrm{tg}\,\alpha$

d) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = 2$

14. Wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli:

a) $\sin\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = 1$,

b) $\sin\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$,

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3\,\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)$,

d) $2 - \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\, 25^\circ \cdot \mathrm{tg}\, 65^\circ$.

15. Wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli:

a) $2 - \operatorname{tg}\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$,

b) $\frac{\sqrt{2}+\cos\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

c) $2(\sin^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha) = 1$,

d) $\frac{\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2$.

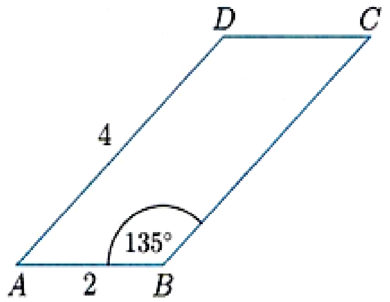
16. Kąt α jest kątem ostrym, a $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia.

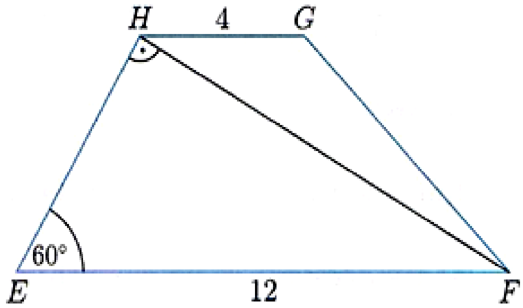
a) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + 4\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ b) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ c) $|\sin\alpha - \cos\alpha|$

17. Dla kątów ostrych α i β pewnego trójkąta prostokątnego zachodzi równość $\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}48$. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2$, b) $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, c) $\cos\alpha + \cos\beta$.

18. Oblicz pole równoległoboku $ABCD$ i trapezu $EFGH$.





19. Przekątne rombu mają długości $\sqrt{2}$ i $\sqrt{6}$. Oblicz miary kątów rombu oraz długość jego boku.

20. Oblicz pole i obwód trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa ma długość 4, a ramię długości 6 tworzy z dłuższą podstawą kąt 30°.

21. Oblicz przybliżoną miarę kąta między przekątnymi prostokąta, w którym długość jednego z boków stanowi 75% długości drugiego boku.

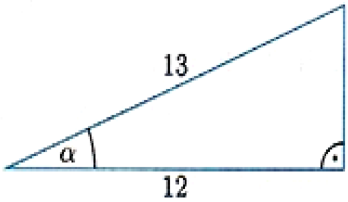
22. Oblicz pole i obwód trójkąta równoramiennego o ramieniu długości 10 i kącie przy podstawie 43°. Odpowiedź podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

23. Dolna stacja kolejki naziemnej na Hrebienok w Tatrach Słowackich jest położona na wysokości 1025 m n.p.m., a górna – na wysokości 1272 m n.p.m. Kolejka pokonuje trasę długości 1937 m. Oblicz średni kąt nachylenia stoku.

24. Wierzchołek latarni morskiej, która stoi na wysokiej skarpie, znajduje się na wysokości 56 m n.p.m. Z kutra widać wierzchołek latarni pod kątem 12°, a jej podstawę pod kątem 8°. Oblicz wysokość skarpy.

Zestaw B. Test jednokrotnego wyboru

1. Dany jest trójkąt prostokątny (rysunek obok). Wartość wyrażenia $\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ wynosi:



A. 1, C. $\frac{\sqrt{7}}{13}$,

B. $\frac{7}{13}$, D. $\frac{\sqrt{119}}{13}$.

2. Jeśli dla kąta ostrego α spełniona jest równość $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}$, to:

A. $\alpha \in (0^\circ; 30^\circ)$, C. $\alpha \in \langle 45^\circ; 60^\circ)$,

B. $\alpha \in \langle 30^\circ; 45^\circ)$, D. $\alpha \in \langle 60^\circ; 90^\circ)$.

3. Dany jest kąt ostry α taki, że $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}$. Wówczas:

A. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, B. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, C. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, D. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

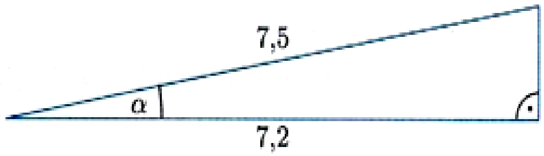
4. Dla dowolnego kąta ostrego α wyrażenie $\cos\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$ jest równe:

A. $\sin 45^\circ$, B. $\sqrt{2}\sin 45^\circ$, C. $\cos 60^\circ$, D. $\frac{1}{2}\cos 60^\circ$.

5. Jeśli dla kąta ostrego α prawdziwa jest równość $\cos\alpha = \sqrt{3}\cos(90^\circ - \alpha)$, to wartość wyrażenia $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ jest równa:

A. $\frac{1}{3}$, B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$, C. 1, D. 3.

6. Dla kąta α przedstawionego na rysunku obok wartość wyrażenia $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$ jest równa:



A. 0,36, B. 0,33, C. 0,28, D. 0,21.

7. Dany jest trójkąt prostokątny o kątach ostrych α i β. Równość $\operatorname{tg}\alpha \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \operatorname{tg}\beta\right) = \sqrt[3]{a}$ jest prawdziwa dla:

A. $a = 8$, B. $a = 4$, C. $a = 2$, D. $a = 1$.

8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$ cm, $|AC| = 2\sqrt{2}$ cm, a kąt CAB ma miarę 60°. Pole tego trójkąta jest równe:

A. 6 cm^2, B. $6\sqrt{2}$ cm^2, C. $6\sqrt{3}$ cm^2, D. $3\sqrt{6}$ cm^2.

9. Dany jest romb o boku długości 10 cm i kącie ostrym, którego cosinus jest równy $\frac{7}{25}$. Pole tego rombu jest równe:

A. 100 cm^2, B. 96 cm^2, C. 68 cm^2, D. 28 cm^2.

Zestaw C. Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1. (2 pkt) – Matura, maj 2010
Kąt α jest ostry, a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

Zadanie 2. (2 pkt)
Oblicz sinus kąta ostrego α, jeżeli $\operatorname{tg}^2\alpha - 8 = 0$.

Zadanie 3. (2 pkt)
Oblicz $3 - 2\sin^2\alpha$, jeżeli α jest kątem ostrym, a $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Zadanie 4. (2 pkt) – Matura próbna, listopad 2009
Kąt α jest ostry, a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Zadanie 5. (2 pkt) – Informator CKE
Kąt α jest ostry, a $\cos\alpha = \frac{8}{17}$. Oblicz $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}$.

Zadanie 6. (2 pkt)
Oblicz $\frac{\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{\sin\alpha}$, jeżeli α jest kątem ostrym, a $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Zadanie 7. (2 pkt) – Informator CKE
W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 2 i 4, a jeden z kątów ostrych ma miarę α. Oblicz $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 8. (2 pkt)
Wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli $\sin^2\alpha = 3\cos^2\alpha$.

Zadanie 9. (2 pkt)
W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych jest o 60% dłuższa od drugiej. Oblicz tangens większego z kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 10. (2 pkt)
Oblicz promień koła opisanego na trójkącie prostokątnym ABC, jeśli cosinus kąta ostrego przy przyprostokątnej długości 6 jest równy 0,12.

Zadanie 11. (2 pkt)
Uzasadnij tożsamość $\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = 1 - \sin^2\alpha$.

Zadanie 12. (2 pkt)
Wyznacz miary kątów w trójkącie prostokątnym, jeżeli tangens jednego z kątów ostrych jest dwa razy większy od sinusa tego kąta.

Zadanie 13. (2 pkt)
Oblicz obwód trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 10, a tangens jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{1}{2}$.

Zestaw D. Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 1. (4 pkt)
Dany jest trójkąt prostokątny o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(8,4)$. Oblicz iloczyn sinusów kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 2. (3 pkt)
Kąt α jest ostry. Uprość wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ tak, aby występowała w nim tylko funkcja sinus. Oblicz wartość wyrażenia, jeżeli $\sin\alpha = \sqrt{3} - 1$.

Zadanie 3. (3 pkt)
Wiadomo, że dla pewnego kąta ostrego α zachodzi równość $\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$. Uzasadnij, że $\sin\alpha \cdot (1 + \sin\alpha) = 1$.

Zadanie 4. (4 pkt) – Matura próbna, styczeń 2009
Uzasadnij, że dla każdego $\alpha \in (0°; 90°)$ prawdą jest, że

$$(1+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \cos\alpha.$$

Zadanie 5. (4 pkt)
Oblicz $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$, jeżeli $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \frac{2}{9}$ i α jest kątem ostrym.

Zadanie 6. (5 pkt) – Matura, maj 2009
Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α.

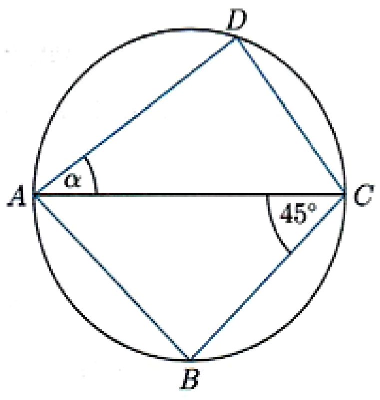
a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha < 0$.

b) Dla $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

Zadanie 7. (4 pkt)
Korzystając ze wzoru $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, wyznacz miarę kąta ostrego α, jeżeli

$$\sin^2 75° + 4\sin^2\alpha + \sin^2 15° = 4$$

Zadanie 8. (5 pkt)
Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg o promieniu 2 (rysunek obok). Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Oblicz pole czworokąta, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



Zadanie 9. (5 pkt)
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni całkowitej jest cztery razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do jego podstawy.